

## 純正律と平均率

### 1. はじめに

ピアノやオルガンのような鍵盤楽器では、1 オクターブを 12 の半音に等比分割してある。音の高さ（振動数）は 1 オクターブごとに 2 倍になるが、1 オクターブを 12 に等比分割すると半音間の比率は  $1 : \sqrt[12]{2}$  となる。これが平均率鍵盤楽器である。複数の高さの音を同時に出したとき、振動数の比率が、簡単な整数比のときに美しい和音になるが、平均率鍵盤楽器では整数比とはならず、無理数比になってしまう。

### 2. 純正律と平均率の和音

長調（Major）の和音と、短調（Minor）の和音を考えてみる。

長調の 3 音（do, mi, so）の振動数比は次のようになっている。

純正律 1 : 1.25 : 1.5

平均率 1 :  $2^{\frac{4}{12}}$  (1.25992--) :  $2^{\frac{7}{12}}$  (1.4983--)

短調の場合は mi が半音下がるのでその振動数比は次のようになる。

純正律 1 : 1.2 : 1.5

平均率 1 :  $2^{\frac{3}{12}}$  (1.1892--) :  $2^{\frac{7}{12}}$  (1.4983--)

このように、1 オクターブを 12 の等比に分割した平均率では、音の高さの比率は、無理数比となるので、整数比の純正律の場合とは異なる。

例えば、純正律の長調の do, mi, so の比率は 1:1.25:1.5 (=4:5:6) であるが、平均率の mi は  $2^{\frac{4}{12}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} = 1.2599--$ ; 1/100 も高すぎるし、また平均率短調の mi (1.1892--) は 1/100 以上も低い。

### 3. 解決法

有理数分割と無理数分割の根本的解決法はない。ただ、近似的解決法として例えば 1889 年(明治 22 年)に田中正平がオクターブを 46(53?) に等比分割したオルガンを作って、ドイツ皇帝カイゼルの前で演奏したそうである。現在なら、so(1.4983--) の誤差は 2/1000 以下なので我慢して、誤差の大きい平均率の mi を自動修正する鍵盤楽器が作成できる。

参考文献：森口繁一：「数理つれづれ」, p119,p123, 岩波書店(2001)